Topologické prostory a variety

Topologické prostory
Charakteristiky topologických prostorů
Topologické variety
Klasifikace topologických variet

Topologické prostory

D: topologický prostor (X, T) ≡
- X podkladový prostor
- T soubor podmnožin X splňující: (otevř. množ.)
  - $\emptyset, X \in T$
  - libovolné sjedn. množ. z T patří do T
  - libov. konečný průnik mn. z T patří do T

T nazýváme topologií prostoru X
množiny z T nazýváme otevřené mn.
místo (X, T) píšeme jen X

D
otevř. mn je množina z T
uzavř. mn je komplement otevřené v X
komponenta je mn. která je ot. i uzavř. a nelze napsat jako disjoint sjedn. dvou takových
báze topologie je soubor otevř. mn., které pomocí sjednocení a kon. průniků generuje celou topolog.
kompaktní mn: každé pokryt. otevř. množinami obsahuje konečné podpokrytí otevř. množ. ?

D: spojité zobrazení mezi top. pr. X a Y ≡
$f : X \to Y$
$\forall x \in X$ $\forall$ okolí $V \subset Y$ bodu $f(x)$ $\exists$ okolí U bodu x tak že $f(U) \subset V$

D: homeomorfismus
ϕ je homeomorf ≡ 1-1 zobrazení
ϕ a ϕ^{-1} spojité

Př: metrické topologie

metrický pr. s fcí vzd. $d(x,y)$

báze topologie: koule libovolného polom. a středu

$$B_{x_0}(r) = \{x,\ d(x,x_0) < r\}$$

různé metriky mohou generovat stejnou topol.

Př: topologie na $\mathbb{R}^n$

metrická topologie metriky $d = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \ldots}$

(v libovolných souř.)

Př: diskrétní topologie

generovaná 1-prvkovými mn. $\{x\}$ $x \in M$

Charakteristiky topologických prostorů

podle separovatelnosti:

- Hausdorffův prostor (T2)
  každé dva body oddělitelné otevř. mn.
  $\forall x, y \in M$ (různé) $\exists U, V \in T$ $\quad x \in U \quad y \in V \quad U \cap V = \emptyset$

  příklad neHausdorff. pr.: přímka s 2 počátky

  

  platí: kompaktní disj. mn. jsou oddělitelné ot. mn.

- regulární Hausdorffův pr. (T3) $\equiv$ H +
  bod a uzavř. mn. mohou být odděleny ot. mn.
- normální Hausdorffův pr. (T4) $\equiv$ H +
  každé dvě disj. uzavř. mn. oddělitelné ot. mn.

podle "velikosti" topologie

- prostor se spočetnou bází topologie (second countable)
- parakompaktní pr.
  každé otevřené pokrytí má lokálně konečné zjemnění
  lokálně konečné $\equiv$ $\forall x$ $\exists$ okolí V bodu x V protíná jen konečný počet množ. zjemněného pokrytí
- lokálně spočetný (first countable)
  každý bod má spočetnou lokální bázi topologie
- Lindelöf. pr.
  každé otevř. pokrytí má spočetné podpokrytí
- separabilní pr.
  má spočetnou hustou podmnožinu
- kompaktní pr.
  každé otevř. pokrytí má konečné podpokrytí
- lokálně kompaktní pr.
  každý bod má kompaktní okolí

Př: neparakompaktní pr = "dlouhá" polopřímka
"slepení" nespočetna intervalů $\langle 0,1)$
$\langle 0,1) \times \omega_1$ + uspořádání $\to$ top. s bází danou intervaly
(ω_1 první nespočetný ordinál)

"celková slušnost" p.

- lokálně euklidovský dim. n
  každý bod má otevř. okolí homeomorfní s oblastí v $\mathbb{R}^n$
- metrizovatelný
  topologie generovaná metrikou (homeomorf s metrick. p.)
- lokálně metrizovatelný
  každý bod má metrizovatelné okolí
- kontrahovatelný p.
  prostor je homotopický bodu
- lokálně kontrahovatelný p.
  každý bod má kontrahovatelné okolí

vztahy mezi charakteristikami

- T2 ⊃ T3 ⊃ T4
- kompaktní => parakompaktní
- lokálně kompaktní ∧ Hausdorf ∧ spoč. báze top. => parakompaktní
- metrizovatelný => parakompaktní (axiom výběru)
- metrizovatelný <=> parakompaktní ∧ Hausdorff ∧ lok. metrizovat.
- regulární Hausdorf ∧ spoč. báze top. => metrizovatelný
- metriz. => (kompaktní mn <=> úplná a totálně omezená)
  (tj. existuje konečné pokrytí oblastmi fixov. max velik.)
- metriz. => (kompaktní mn <=> každá posl. má konvergentní podposloupnost s limitou v množině)
- parakompaktní Hausdorf => normální Hausdorf
- parakompaktní Hausdorf => exist. rozklad jednotky podřízený libovolnému otevř. pokrytí
- spočetná báze top.
  => lokálně spočetný
  => separabilní
  => Lindelöf

pro metrizovatelné platí ekvivalence

Topologické varieta

D: topologická varieta M ≡

M je lokálně Euklidovský top. pr.

M je Haussdorffův

většinou se i uvažuje

parakompaktní či

se spoč. bází topologie

budeme uvádět explicitně

pro topologické variety platí:

- top. varieta je disj. sjednocení souvislých komponent
- spočetná báze top. => parakompaktnost
- parakompaktnost + spočetné komp. => spočetná báze top.
- spočetná báze top. <=> separovatelný a parakompaktní
- kompaktní => spočetná báze top.
- metrizovatelný <=> parakompaktní
- lokálně kompaktní
- lokálně souvislý
- lokálně spočetný
- lokálně kontrahovatelný
- lokálně metrizovatelný

Klasifikace topologických variet

dim = 0 diskrétní prostory – pouze kardinalita (počet)

dim = 1 parakompaktní souvislé homeomorfní $\mathbb{R}$ a S^1
nesouvislé – kombinace $\mathbb{R}$ a S^1

dim = 2 sféra s g uchy, případně s crosscupem
orientovatelné neorientovatelné

dim = 3 úplná klasifikace založena na
Thurstonově geometrizační hypotéze
každá 3-varieta lze rozdělit na části
s jednou z 8 typových (primárních) geometrií
dokázáno
Thurston 1982 pro Hakenovy variety
Grigori Perelman 2003
(Ricci flow na bázi metody R. Hamiltona)
2006 Fieldsova medaile (odmítl převzít)
2010 Clay institut Millennium Prize za Poincarého hyp.
(odmítl 1 mil \$)
implikuje platnost Poincarého hypotézy
- jednoduše souvislá uzavřená 3-varieta je homeomorfní stand. sféře
(neplatí pro $n>3$)
- 3-variete homotopicky ekvivalentní 3-sféře je homeomorfní stand. sféře
(platí pro $n>3$, ekvivalentní předchozímu pro $n=3$)

dim > 3 nemožná úplná klasifikace
rozhodnout, zda je prostor jednoduše souvislý je
nealgoritmický problém
jednoduše souvislé var. dim ≥ 5 lze klasifikovat